十字相乘法與係數的關係

奧數揭秘

這次分享一道關於一元二次方程的問題，情景很常見。

問 題： **一元二次方程式$ax^2 + bx + c = 0$之中，a、b和c都是整數。若方程的解都是有理數，證明：a、b或c中，必有一個雙數。**

答 案： 假設a、b和c都是單數，設有理數解為$\frac{q}{p}$和$\frac{r}{s}$其中p、q、r和s都是整數。則有

$$(px - q)(sx - r) = 0$$

$$psx^2 - (pr + qs)x + qr = 0$$

由於ps、-(pr + qs)和qr分別是單數a、b和c的因數，因此亦為單數。

因為ps和qr都是單數，所以p、s、q和r都是單數，但這會推出-(qr + qs)是雙數，矛盾。

因此a、b和c之中，必有一個雙數。

題解中要留意的是，算式$psx^2 - (pr + qs)x + qr = 0$當中，雖然看來跟原本的算式$ax^2 + bx + c = 0$很相似，但不能說a就是ps，c就是qr之類，因為可以是差了一個倍數的。比如$4x^2 + 2x - 2 = 0$，解是$\frac{1}{2}$和-1，但如上邊的做法，把算式寫成$(2x - 1)(x + 1) = 0$，展開後得出的算式卻是$2x^2 + x - 1 = 0$，各係數就相差了一個倍數。

這道題有趣的地方，是結論很常見，但沒留意的話真的一直不會發現。係數為整數的一元二次方程，解為有理數的，多數在解一些基本的一元二次方程、練習十字相乘法的時候，就會見過無數條相關的題目，但原來係數當中總有個雙數。說明白了，原理很簡單，但沒聽過的話就未必會留意到。

看奧數的題目，有時用欣賞的角度去看問題，也是挺好的，未必看來就難到不得了的才算好。比如題目的情景很常見，結論卻是從前沒想過的想法，那也不錯。就像這次的情景和結論，若是論難處來說，可能未必有什麼挑戰性，但在看一些一元二次方程的時候，多了一個角度，長遠也豐富了思想。

從應用角度來說，若果見一元二次方程裏的係數都是單數，那就不能輕易做到十字相乘，直接用公式好了。比如$3x^2 - 3x - 1 = 0$，係數都是單數，按這次的結論，要解就用公式，不用費神去試用十字相乘。

在平常做數學題的過程中，不時留意一下有什麼情景較普遍的，對學數學很有益處，就像在一個小地區的交通網絡上加多了幾條高速公路，長遠來說，方法也就更快了。

這些情景普遍的題目，好處明顯，但也是可遇不可求，就是想找也未必能找到多少。在艱難的問題裏，耐力練得夠好，遇着這些較淺易的技巧，一學就會了。若是一心去找些小工具，難找之餘也練不出什麼，一會就放棄了。

暑假快到了，學生多了時間待在家裏，閒時可以看一些數學網頁，培養對數學的興趣。遇上難題時，有意志去鍛煉，不是一朝一夕想做就做得好的，背後都是靠興趣。興趣的來源，有時是些數學故事，有時是有趣的問題，有時是精彩的推理，這些都是依靠閒時體驗。

■張志基